Dossier n°12 : Exemples d'approche et d'applications du raisonnement par récurrence dans des domaines variés.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 29 août 2003
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

Le raisonnement par récurrence est introduit et utilisé en Terminale S.

Je choisis donc de situer ce dossier en Terminale S.

II Commentaires généraux.

II.1 A propos du sujet.

On est très souvent amenés, en mathématiques et plus particulièrement en Terminale S, à étudier la validité d'une proposition P_n dépendant d'un entier naturel n, et ce, pour tout entier n.

Il est bien sûr physiquement impossible de vérifier la validité de P_n pour chacun des entiers naturels n.

Or, on peut parfois montrer que si P_n est vraie pour un entier n donné quelconque alors P_{n+1} est vraie.

Par suite, si P_1 est vrai, alors P_2 est vraie donc P_3 est vraie et ainsi de suite : c'est le raisonnement pas récurrence.

Le principe de récurrence est en fait un axiome c'est-à-dire une propriété non démontrable et à l'origine de la démonstration de nombreuses propriétés mathématiques.

L'objectif de ce dossier est donc de proposer aux élèves une approche intuitive du principe de récurrence puis, après l'avoir énoncé, d'en donner des applications dans différents domaines mathématiques.

II.2 A propos des exercices.

J'ai donc choisi, pour illustrer ce dossier, de vous présenter six exercices, issus de diverses situations :

- l'exercice n°1 propose une approche du raisonnement par récurrence ;
- l'exercice n°2 est une application en arithmétique ;
- l'exercice n°3 propose de montrer une inégalité ;
- l'exercice n°4 propose l'étude d'une suite récurrente ;
- l'exercice n°5 propose l'étude d'une suite de points ;
- l'exercice n°6 est une application en géométrie.

Rappelons le principe du raisonnement par récurrence.

Pour montrer qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geq m$ (m donné) par récurrence, on procède en trois étapes :

- ***première étape*** : on vérifie que P_m est vraie ;
- ***deuxième étape*** : on suppose que pour un entier naturel $n \geq m$ quelconque donné, la proposition P_n est vraie et on démontre que la proposition P_{n+1} est vraie ;
- ***conclusion*** : lorsque ces deux étapes sont franchies, on conclut que la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geq m$.

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.

But : Etudier la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -0,8\, u_n + 2$.

Méthode :

- Représenter les quinze premiers termes de $(u_n)_n$ et remarquer qu'ils sont compris entre 1 et 1,2.
- Montrer ce résultat pour u_{15}, u_{16}, u_{17} à l'aide des variations de $f : x \to -0,8x + 2$.

Objectif : Proposer aux élèves une première approche intuitive du raisonnement par récurrence.

En effet, puisque $f([1\,;1,2]) \subset [1\,;1,2]$, il suffit de savoir qu'un terme de la suite est compris entre 1 et 1,2 pour en déduire que le suivant l'est aussi.

C'est sur cette idée que s'appuie le raisonnement par récurrence.

A la suite de cet exercice, on énoncera aux élèves le principe de ce raisonnement.

III.2 Exercice n°2.

But : Etudier la validité de P_n : « 9 divise 10^n+1 ».

Méthode :

- Montrer que P_n est héréditaire ie si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie.
- Conclure… avec prudence.

Objectif : Mettre en évidence l'importance de la première étape du raisonnement par récurrence.

III.3 Exercice n°3.

But : Etudier la validité de P_n : « $3^n \geq (n+2)^2$ »

Méthode :

- Etudier a validité de P_n pour n = 0,1, 2, 3.
- Conclure.

Objectif : Etudier un cas où la récurrence ne commence pas à n=0 ou n=1.

III.4 Exercice n°4.

But : Montrer que la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 2\cos\theta$ $\left(\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ est convergente.

Méthode :

- Calculer u_1 et u_2 (permet d'émettre une conjecture).
- Exprimer u_n en fonction de n.

Commentaire :

L'étude des suites récurrentes était dans les anciens programmes de Terminale S. Cet exercice montre qu'on peut toutefois étudier de telles suites, dans certains cas, sans l'outil qu'est le théorème du point fixe.

III.5 Exercice n°5.

But : Montrer que tout point S_n de la suite $(S_n)_n$ définie par $S_0(0\,;1)$ et $S_{n+1} = g(S_n)$ avec $g : (x\,;y) \to (9x+20\,;4x+9y)$ est un point de $\mathcal{H}$: $x^2-5y = 1$ de coordonnées entières.

<u>Intérêt :</u> Il y a plusieurs propriétés à démontrer, non explicitement énoncées.

III.6 Exercice n°6.

<u>But :</u> Déterminer le nombre D_n de diagonales d'un polygone à n côtés convexe.

<u>Méthode :</u>

- Etudier D_3, D_4, D_5, D_6 et établir une relation en fonction de D_n.
- Etablir une relation entre D_{n+1} et D_n.

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (n°1 p 240, Bréal TS 2002).

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -0,8u_n + 2$.

1. Calculer puis représenter les quinze premiers termes à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice. Que remarque-t-on ?
2. On souhaite savoir si, pour $n \geq 15$, $u_n \in [1 ;1,2]$.
   a) Etudier les variations sur IR de $f : x \to -0,8x +2$ et en déduire que $u_{15} \in [1 ;1,2]$ en utilisant $u_{14} \in [1 ;1,2]$.
   b) Montrer en utilisant le même raisonnement, que u_{16}et u_{17} sont compris entre 1 et 1,2.

IV.2 Exercice n°2 (n°46 p 21, Transmath TS 2002).

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition P_n : « 9 divise 10^n+1 ».

1. Montrer que si P_n est vrai pour un certain n, alors P_{n+1} est vraie.
2. La proposition P_n est-elle vraie pour tout entier naturel ?

IV.3 Exercice n°3 (n°40 p 20, Transmath TS 2002).

Pour tout entier naturel n, on note P_n la proposition : « $3^n \geq (n+2)^2$ ».

1. P_0, P_1, P_2 et P_3 sont-elles vraies ?
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 3$, P_n est vraie.

IV.4 Exercice n°4 (n°54 p 21, Transmath TS 2002).

θ est un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. La suite $(u_n)_n$ est définie par $u_0 = 2\cos\theta$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer par récurrence que $u_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$.
3. En déduire que $(u_n)_n$ est convergente et préciser sa limite l.

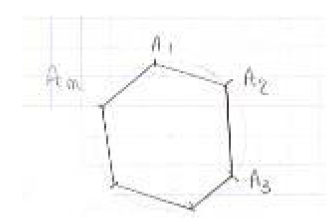
IV.5 Exercice n°5 (n°55 p 21, Transmath TS 2002).

Dans le plan P muni d'un repère orthonormal, on considère la courbe $\mathcal{H}$, ensemble des points M(x ;y) dont les coordonnées sont telles que $x^2-5y^2=1$. g est l'application sui à tout point M de coordonnées (x ;y) associe le point M' de coordonnées (9x+20y ;4x+9y). La suite de points $(S_n)_n$ est définie par S_0 de coordonnées (1 ;0) et pour tout entier naturel n, $S_{n+1} = g(S_n)$.

Démontrer que pour tout entier naturel, S_n est un élément de $\mathcal{H}$ et a des coordonnées entières.

IV.6 Exercice n°6 (n°57 p 22, Transmath TS 2002).

N est un entier naturel supérieur ou égal à3. Sur un cercle, on dispose, dans l'ordre, n points A_1, A_2, …, A_n de telle sorte qu'on obtienne un polygone convexe de n sommets inscrit dans un cercle.



On note D_n le nombre de diagonales d'un tel polygone.

1. Déterminer D_3, D_4, D_5, D_6.

2. Démontrer qu'on peut trouver deux réels a et b etls que $D_n = an^2 + bn$ pour tout n compris entre 3 et 6.

3. On ajoute un point B sur le cercle, par exemple entre A_1 et A_n et on obtient un nouveau polygone convexe $A_1A_2 \ldots A_n$ B ayant n+1 sommets. Les D_n diagonales du polygone $A_1A_2 \ldots A_n$ sont des diagonale du polygone $A_1A_2 \ldots A_n$ B. $[A_1A_n]$ et les diagonales issues de B sont de nouvelles diagonales de ce polygone.

a) Trouver une relation de récurrence entre les nombres D_{n+1} et D_n.

b) Calculer D_n pour tout entier supérieur ou égal à 3.

V Commentaires.

Il est demandé dans le dossier proposé par le jury de faire appel à la calculatrice pour la résolution d'au moins un exercice.